

分数阶 Fourier 变换极值搜索算法研究

卫红凯¹, 王平波¹, 蔡志明¹, 姚万军²

(1. 海军工程大学电子工程学院, 湖北武汉 430033; 2. 海军兵种指挥学院, 广东广州 510430)

摘要: 针对步进式搜索算法在分数阶 Fourier 变换域二维平面效率、精度低下的问题, 通过推导分数阶 Fourier 域极值函数的一阶导数及其快速算法, 将全局寻优效果好的混沌优化法和局部搜索能力强的多步拟牛顿法相结合, 提出了分数阶 Fourier 变换极值混合优化算法. 并对混合算法的全局收敛性进行了证明. 最后, 通过仿真实例, 验证了混合算法的全局收敛性及其快速收敛能力. 混合优化算法的收敛速度和精度均好于步进式搜索法、混沌优化法及步进式-多步拟牛顿混合法.

关键词: 分数阶 Fourier 变换; 混沌优化; 多步拟牛顿法; 线性调频信号

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2949-04

Study of Algorithm for Extremum Seeking in the Fractional Fourier Transform

WEI Hong-kai¹, WANG Ping-bo¹, CAI Zhi-ming¹, YAO Wan-jun²

(1. *Electronic Engineering College, Navy Engineering University, Wuhan, Hubei 430033, China;*

2. *Naval Arms Command Academy, Guangzhou, Guangdong 510430, China*)

Abstract: In order to overcome the problem of step by step searching method in the two-dimensional Fractional Fourier domain, a hybrid algorithm combines chaos optimization method and multi-step Quasi-Newton method is proposed by deriving the first derivative and its fast computation algorithm. And the global convergence of the algorithm is proved and tested. The simulation result indicates that the presented method is preferable than that of direct searching method, chaos optimization algorithm and multi-step quasi-Newton method mixed with direct searching method considering computation efficiency and accuracy.

Key words: fractional Fourier transform; chaos optimization; multi-step Quasi-Newton method; LFM signal

1 引言

传统的 Fourier 变换适合处理平稳信号, 对于非平稳信号, 无法反映出信号的局部特征. 作为 Fourier 变换的推广, 分数阶 Fourier 变换^[1] (FRFT) 是基于此出现的一种信号处理新方法. FRFT 采用了线性调频基, 因此, 特别适合处理 Chirp 类非平稳信号. 利用 LFM 信号在分数阶 Fourier 域的聚焦性, 常用来检测通信、雷达、声纳等领域中应用广泛的 LFM 信号.

通常, 对线性调频 (LFM) 信号的检测和参数估计, 大多是采用在分数阶 Fourier 域二维平面步进式搜索方式^[2~6], 效率低下, 当对精度要求高时, 更是如此. 齐林等^[7] 提出了“步进式粗搜”加“拟牛顿法精搜”策略. 但为了保证能找到全局最优解, 避免陷入局部最优解, 粗搜步长不能太粗, 影响了算法的效率. 拟牛顿法是局部搜索法, 算法收敛到初始值附近的极值点, 因此, 其搜索结果受步进式搜索结果影响较大, 无法保证收敛到全局极值点. 为了保证收敛到全局解, 则步进式搜索中需以较

小步长进行搜索, 降低了搜索效率. 且搜索步长的选择没有统一标准, 只能人为设定. 拟牛顿法是一类算法, 在不断发展中. 近年来出现的多步拟牛顿法^[8,9] 由于利用了以前迭代所得信息, 提高了收敛速度和精度. 本文结合全局搜索性能好的混沌优化法和局部搜索能力强的多步拟牛顿法, 提出了分数阶 Fourier 域 LFM 信号极值寻优混合算法, 不仅能保证收敛到全局最优解, 而且收敛速度快、精度高.

2 分数阶 Fourier 域优化问题描述

分数阶 Fourier 变换的定义为^[10,11]:

$$\begin{aligned} X_p(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, t) x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_\alpha e^{i\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)} x(t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $A_\alpha = \frac{e^{(-i\pi \operatorname{sgn}(\sin\alpha) + \frac{ig}{2})}}{|\sin\alpha|^{1/2}}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} p$, $0 < |p| < 2$.

当 $p = 0$ 时, 核函数 $K_p(u, t) = \delta(u - t)$, 当 $p = \pm 2$ 时, 核函数 $K_p(u, t) = \delta(u + t)$.

实际中,信号是离散化形式,根据 Ozaktas 等^[11]提出的分解型离散化算法,有:

$$X_p(u) = \sum_{n=-N}^N \frac{A_\alpha}{2\Delta x} e^{i\pi \left(u^2 \cot\alpha - \frac{3u \csc\alpha}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \quad (2)$$

考虑到拟牛顿法是下降类迭代算法,则分数阶 Fourier 域极值寻优问题可描述为:在分数阶 Fourier 域二维平面 (p, u) 内,寻找合适的 (p_0, u_0) ,使得目标函数 $f(p, u) = -|X_p(u)|^2$ 达到最小,即:

$$(p_0, u_0) = \arg \min_{(p, u)} (-|X_p(u)|^2) \quad (3)$$

3 分数阶 Fourier 域优化算法原理

3.1 混沌优化法

混沌优化法是由李兵等^[12]提出的一种新的全局优化算法.该法主要利用混沌运动的遍历性(即混沌序列能不重复的经历一定范围内的所有状态)进行搜索.其基本思想是根据一定的混沌映射,产生混沌序列,通过载波方式将混沌序列载入到参变量区间,并比较各序列的目标函数值,通常以一定步数内函数值不发生变化作为终止条件,以满足终止条件时的当前值作为最优值输出.

3.2 多步拟牛顿法

对于中小规模无约束化问题,拟牛顿法^[13]是一类非常有效的下降类迭代算法.拟 Newton 法用某一较易得到的正定对称矩阵来近似代替 Hessian 矩阵,在保证收敛速度的同时,克服了 Newton 法中 Hessian 矩阵的求解、求逆及其正定性要求的缺点,易于实现.

传统的拟牛顿法(单步拟牛顿法)正定对称矩阵的构造只用到当前迭代点处的函数值及其导数,对 Hessian 矩阵的近似效果不理想.基于此,近年来发展了一种新的算法,即多步拟牛顿法,该法充分利用以前得到的迭代点信息来构造正定对称矩阵,提高了求解精度和速度.

因此,本文采用多步拟牛顿法中 BFGS 法来进行分数阶 Fourier 域二维平面局部极值搜索.由于多步 BFGS 法需要用到目标函数的一阶导数信息,下面进行导数及其快速算法推导.

$$\begin{aligned} |X_p(u)|^2 &= X_p(u) X_p^*(u) \\ &= \frac{A_\alpha(p) A_\alpha^*(p)}{(2\Delta x)^2} \left[\sum_{n=-N}^N e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_{n=-N}^N e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \right]^* \\ &= \frac{1}{|\sin\alpha(p)| (2\Delta x)^2} B(u, p) B^*(u, p) \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$B(u, p) = \sum_{n=-N}^N e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |X_p(u)|^2}{\partial p} &= 2 \operatorname{real} \left(\frac{1}{|\sin\alpha(p)| (2\Delta x)^2} \frac{\partial B(u, p)}{\partial p} B^*(u, p) \right) \\ &\quad - \frac{\pi \operatorname{sgn}(\sin\alpha(p)) \cos\alpha(p)}{2 \sin^2\alpha(p) (2\Delta x)^2} B(u, p) B^*(u, p) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\partial B(u, p)/\partial p$ 如式(6)所示.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(u, p)}{\partial p} &= \sum_{n=-N}^N \frac{\pi}{2} \left(\frac{i2\pi u n \cot\alpha(p) \csc\alpha(p)}{2\Delta x} - \frac{i\pi n^2 \csc^2\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right) \\ &\quad \cdot e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

将 u 离散化,令: $u = m/(2\Delta x)$,则上式中,直接计算 $\partial B(u, p)/\partial p$ 的复杂度为 $O(N^2)$, N 为信号点数,为了降低计算量,将 $\partial B(u, p)/\partial p$ 变形,有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(u, p)}{\partial p} &= \sum_{n=-N}^N \frac{\pi}{2} \left(\frac{i\pi n^2 \cot\alpha(p) \csc\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} - \frac{i\pi n^2 \csc^2\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right) \\ &\quad \cdot e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \\ &\quad + \sum_{n=-N}^N \frac{\pi}{2} \left(\frac{-i\pi (m-n)^2 \cot\alpha(p) \csc\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right) \\ &\quad \cdot e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \\ &\quad + \sum_{n=-N}^N \frac{\pi}{2} \left(\frac{i\pi m^2 \cot\alpha(p) \csc\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right) \\ &\quad \cdot e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

又:

$$\begin{aligned} e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} &= e^{-\frac{i\pi \csc\alpha(p) m^2}{(2\Delta x)^2}} e^{\frac{i\pi \csc\alpha(p) (m-n)^2}{(2\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i\pi (\cot\alpha(p) - \csc\alpha(p)) n^2}{(2\Delta x)^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

则可知, $\partial B(u, p)/\partial p$ 由三项叠加组成,每项均可看成是两个信号的卷积,可以借助 FFT 计算,因此,运算量降为: $O(N \log N)$.

$$\frac{\partial |X_p(u)|^2}{\partial u} = 2 \operatorname{real} \left(\frac{1}{|\sin\alpha(p)| (2\Delta x)^2} \frac{\partial B(u, p)}{\partial u} B^*(u, p) \right) \quad (9)$$

其中, $\partial B(u, p)/\partial u$ 如式(10)所示.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(u, p)}{\partial u} &= \sum_{n=-N}^N \frac{-i2\pi n \csc\alpha(p)}{2\Delta x} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \\ &\quad \cdot e^{i\pi \left(-\frac{2u \csc\alpha(p)}{2\Delta x} + \frac{n^2 \cot\alpha(p)}{(2\Delta x)^2} \right)} \end{aligned} \quad (10)$$

同理,直接计算式(10)的运算量为 $O(N^2)$,经化简,可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(u, p)}{\partial u} &= \sum_{n=-N}^N e^{-\frac{i\pi \csc\alpha(p) m^2}{(2\Delta x)^2}} e^{\frac{i\pi \csc\alpha(p) (m-n)^2}{(2\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{-i2\pi n \csc\alpha(p)}{2\Delta x} e^{\frac{i\pi (\cot\alpha(p) - \csc\alpha(p)) n^2}{(2\Delta x)^2}} x \left(\frac{n}{2\Delta x} \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

则相应地,运算量由 $O(N^2)$ 降为 $O(N \log N)$.

有一点需要说明,对于连续可导函数而言,极值点

处的导数为零.但在实际中经采样后,信号为有限离散值,使得 LFM 信号在分数阶 Fourier 域极值点处的导数极可能不为零.因此,将通常迭代算法中导数为零作为终止条件修正为函数值不再减少作为终止条件.LFM 信号在分数阶 Fourier 域二维平面的一阶导数如图 1、图 2 所示.

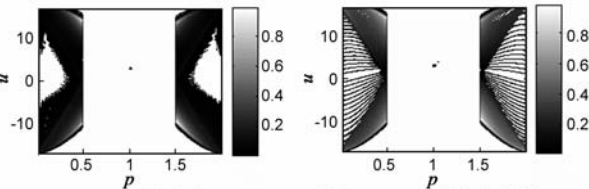


图1 $|\delta f/\delta p|$ 的等高线图

图2 $|\delta f/\delta u|$ 的等高线图

3.3 混合优化算法

多步拟牛顿算法虽然收敛速度快,其收敛性受初始值影响大,将之与具有全局搜索能力的混沌优化算法结合起来,形成混合算法.既具有全局收敛性,又具有较快的收敛速度.混合算法的流程图如图 3 所示.

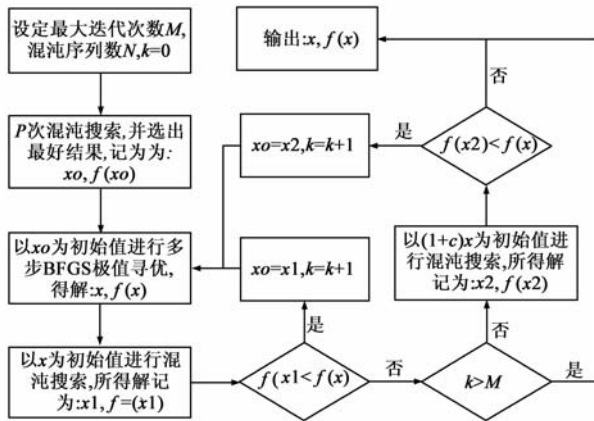


图3 混合算法流程图

3.4 混合优化算法全局收敛性证明

命题 设 $\{x^k = (p^k, u^k), k = 1, 2, \dots\}$ 是混合优化算法产生的分数阶 Fourier 域迭代序列,则迭代序列以概率 1 收敛到目标函数 $f(x) = -|X_p(u)|^2$ 的全局最优解 $x^* = (p^*, u^*)$.

证明 混合优化算法为下降算法,则

$$f(x^1) > f(x^2) > \dots > f(x^k) > \dots \geq f(x^*)$$

令 $R_k = \{x^k \mid |f(x^k) - f(x^*)| < \delta\}$, 对 $\forall x^k \in R_k$, 有 $|f(x^k) - f(x^*)| < \delta$. 又 $f(x^k) > f(x^{k+1})$, 则 $|f(x^{k+1}) - f(x^*)| < \delta$. 则, $R_k \subset R_{k+1}$, 即 $R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_k \subset \dots$. 因此, 概率 $P(R_k)$ 单调不减, 又 $P(R_k) \leq 1$, 单调有界数列必有极限, 则有: $\lim_{k \rightarrow \infty} P(R_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k) = 1$. 由极限的定义可知, 随着 k 的增加, 序列 $\{x^k\}$ 以概率 1 收敛到最优解 x^* . 即证之.

4 仿真实例

接收信号 $x(t) = e^{i2\pi f_0 t + i\pi \mu t^2} + w(t), t \in [0, T]$. 信号脉宽 $T = 0.3s$, 采样频率 $f_s = 4000Hz$, 带宽为 $300 \sim 390Hz, f_0 = 300Hz, \mu = 300s^{-2}$, $w(t)$ 为白噪声, 信噪比 $-5dB$. 步进法(直接法)、混沌优化法、直接-多步 BFGS 混合方法、混沌-多步 BFGS 混合方法的优化结果如表 1 所示.

表 1 优化结果比较

优化方法	理论值 (u_0, p_0)	估计值 (\hat{u}, \hat{p})	时间(s)
直接法(步长:0.001)		(1.014, 2.9878)	92.2
直接法(步长:0.0008)		(1.0144, 2.9878)	112.2
混沌优化法直接-多步	(1.0143, 2.9870)	(1.014, 2.9878)	45.3
BFGS 混合方法(步长:0.01)		(1.0144, 2.9878)	40.1
混沌-多步 BFGS 混合方法		(1.0143, 2.9878)	16.9

表 1 中, 理论值与估计值有微小偏差, 这是由于对信号的离散化采样导致的. 由表 1 可知, 直接法的计算精度和时间受步长影响, 当步长减小时, 尽管其精度提高, 但以牺牲计算效率为代价. 直接-多步 BFGS 混合方法的速度稍快于混沌优化法, 本文提出的混沌-多步 BFGS 混合方法时间最短.

5 结论

本文将混沌优化算法和多步拟牛顿算法结合起来, 形成的混合算法不仅具有全局收敛性, 而且在保证精度的前提下, 具有快速收敛能力. 通过仿真实例演示了算法的性能. 本文提出的混合优化算法也适用于分数阶 Fourier 域滤波及线性正则变换.

参考文献:

- [1] L B Almedia, The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084 - 3091.
- [2] 张淑宁, 赵惠昌, 吴兵. 基于分数阶傅立叶变换的伪码体制引信线性调频干扰抑制技术[J]. 兵工学报, 2006, 27(1): 32 - 36.
Zhang Shu-ning, Zhao Hui-chang, Wu Bing. LFM interference excision technique in pseudo-random code fuse based on fractional Fourier transform[J]. Acta Armamentarii, 2006, 27(1): 32 - 36. (in Chinese)
- [3] 赵兆, 是湘全. 一种基于分数阶 Fourier 变换的雷达运动目标检测算法[J]. 电讯技术, 2007, 47(4): 95 - 98.
Zhao Zhao, Shi Xiang-quan. A moving targets detection algorithm based on fractional Fourier transform[J]. Telecommunication Engineering, 2007, 47(4): 95 - 98. (in Chinese)
- [4] Wang Ling, Chen Tian-qi. Frequency and DOA estimation of LFM in fractional Fourier domain[A]. IEEE International Con-

- ference on Communications, Circuits and Systems and West Sino Expositions [C] Chengdu, China: IEEE, 2002. 1029 – 1033.
- [5] Wang Hong-yan, Wu Yan-hong, Jia Xin. Estimation of Doppler parameters for spaceborne SAR based pm Fractional transform [A]. International Conference on Signal Processing [C] Beijing, China: IEEE, 2004. 1981 – 1984.
- [6] 董永强, 陶然, 周永思, 等. 含未知参数的多分量 Chirp 信号的分数阶傅里叶分析 [J]. 北京理工大学学报, 1999, 19(5): 612 – 616.
Dong Yong-qiang, Tao Ran, Zhou Yong-si, et al. The fractional Fourier analysis of multi-component chirp signals with unknown parameters [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1999, 19(5): 612 – 616. (in Chinese)
- [7] 齐林, 陶然, 周永思, 等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计 [J]. 中国科学 E 辑, 2003, 3(8): 749 – 959.
- [8] J A Ford, I A Moghrabi. Multi-step quasi-Newton methods for optimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1994, 50(1): 305 – 323.
- [9] J A Ford, S Tharnlikit. New implicit updates in multi-step quasi-Newton methods for unconstrained optimisation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 152(1): 133 – 146.
- [10] 孙晓兵, 保铮. 分数阶 Fourier 变换及其应用 [J]. 电子学报, 1996, 24(12): 60 – 65.
Sun Xiao-bing, Bao Zheng. Fractional Fourier transform and its applications [J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(12): 60 – 65. (in Chinese)
- [11] H M Ozaktas, Orhan Arikan, Alper Kutay, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(9): 2141 – 2150.
- [12] 李兵, 蒋慰孙. 混沌优化方法及其应用 [J]. 控制理论与应用, 1997, 14(4): 613 – 615.
Li bing, Jiang Wei-sun. Chaos optimization method and its application [J]. Control Theory and Application, 1997, 14(4): 613 – 615. (in Chinese)
- [13] 万仲平, 费浦生. 优化理论及方法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004. 34 – 76.
Wan Zhong-ping, Fei Pu-sheng. Optimization Theory and Techniques [M]. Wuhan: Wuhan university Press, 2004. 34 – 76. (in Chinese)

作者简介:



卫红凯 男, 1984 年 2 月生于山西运城. 海军工程大学在读博士研究生, 研究方向为水声信号处理.

E-mail: whk200605@163.com

王平波 男, 1976 年 8 月生于山东日照. 海军工程大学副教授, 博士, 研究方向为水声信号处理. E-mail: blackberet@163.com

蔡志明 男, 1962 年 11 月生于福建福州. 海军工程大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为水声信号处理.

姚万军 男, 1978 年 12 月出生于湖北公安. 海军兵种指挥学院讲师, 博士, 研究方向为水声信号处理.